第９講　総合問題(1)

1　実数 a に対して，点 $(a,\ 1)$ を通り傾きが a の直線と曲線 $y=|x^2-4|$ との交点の個数を求めよ．

【Point Pickup】

ⓒRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 xy 平面上において，点Pを通る直線 l と曲線 $y=x^2$ とで囲まれる部分の面積が $\dfrac{1}{6}$ である．この条件を満たす点Pが描く軌跡を求め，これを図示せよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　Oを原点とする座標平面上の曲線 $y=x^2$ 上の2点A，Bに対し，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=t$ とおく．

(1)　t のとり得る値の範囲を求めよ．

(2)　$t=2$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となる点Pの軌跡を求め，図示せよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第9講　総合問題 (1)

> **1**　実数 a に対して，点 $(a,\ 1)$ を通り傾きが a の直線と曲線 $y=|x^2-4|$ との交点の個数を求めよ.

点 $(a, 1)$ を通り傾きが a の直線は　$y=a(x-a)+1$　より　$y=ax-a^2+1$　……①

①で，$a=t$ のとき　$y=tx-t^2+1$　　$a=-t$ のとき　$y=-tx-t^2+1$

よって，$a=\pm t$ のときの①の2つのグラフは y 軸に関して対称である.

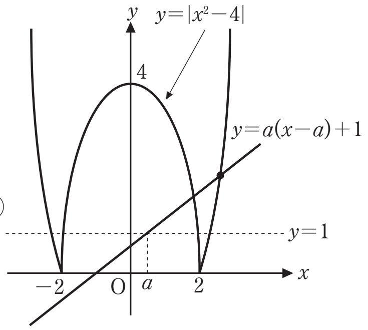
また，$y=|x^2-4|$ もまた y 軸に関して対称である.

よって，$a\geqq 0$ のときの①と，曲線 $y=|x^2-4|$ の交点の個数を考える.

①と $y=x^2-4$ $(x\geqq 2)$ の交点の x 座標は

$x^2-4=ax-a^2+1$　より　$x^2-ax+a^2-5=0$　……②

において $x\geqq 2$ に存在する解である.



判別式を D とすると $D\geqq 0$ より

$a^2-4(a^2-5)\geqq 0$　よって　$0\leqq a\leqq \dfrac{2\sqrt{15}}{3}=\sqrt{\dfrac{20}{3}}$　……③

$f(x)=x^2-ax+a^2-5$ とすると

$f(2)=a^2-2a-1$　　グラフの軸：$x=\dfrac{a}{2}$

$x\geqq 2$ で①と $y=x^2-4$ が2交点（接するときを含む）をもつのは

$f(2)\leqq 0$ より　$a\geqq 1+\sqrt{2}$

軸$\geqq 2$ より　$a\geqq 4$　　よって，③との共通部分はない.

したがって，$x\geqq 2$ において，①と $y=x^2-4$ のグラフが2交点をもつことも，接することもない.

$x\geqq 2$ で①と $y=x^2-4$ が1交点のみをもつのは

$f(2)\leqq 0$ より　$0\leqq a\leqq 1+\sqrt{2}$

特に，$a=1+\sqrt{2}$ のときは①が点 $(2, 0)$ を通るときである.

したがって，$a>1+\sqrt{2}$ のときは，①と $y=x^2-4$ の交点はない.

以上の結果に $a<0$ のときを考慮し，求める交点の個数は

$$\begin{cases} |a|<-1+\sqrt{2} \text{ のとき 4 個} \\ |a|=-1+\sqrt{2} \text{ のとき 3 個} \\ -1+\sqrt{2}<|a|<1+\sqrt{2} \text{ のとき 2 個} \\ |a|=1+\sqrt{2} \text{ のとき 1 個} \\ |a|>1+\sqrt{2} \text{ のとき 0 個} \end{cases}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　xy 平面上において，点 P を通る直線 l と曲線 $y=x^2$ とで囲まれる部分の面積が $\dfrac{1}{6}$ である．この条件を満たす点 P が描く軌跡を求め，これを図示せよ．

P$(X,\ Y)$ とおく．

$l : y=m(x-X)+Y=l(x)$ と $y=x^2$ の 2 交点の x 座標を $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とすると，

$x^2-mx+mX-Y=0$ の 2 解が α, β である．

よって　$\alpha+\beta=m,\ \alpha\beta=mX-Y$

このとき，2 つのグラフで囲まれる部分の面積 S は

$$S=\int_\alpha^\beta \{l(x)-x^2\}dx=-\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

$S=\dfrac{1}{6}$ より　$(\beta-\alpha)^3=1$

よって　$(\beta-\alpha)^2=1$　より　$(\beta+\alpha)^2-4\alpha\beta=1$

$$m^2-4(mX-Y)=1$$

$$m^2-4Xm+4Y-1=0$$

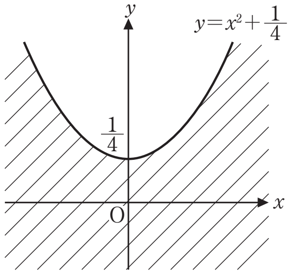
この m の 2 次方程式の判別式を D とすると，m が実数となるのは

$$\frac{D}{4}=4X^2-(4Y-1)\geqq 0$$

よって　$Y\leqq X^2+\dfrac{1}{4}$ のとき，これを満たす $(X,\ Y)$ が，題意を満たす直線の傾き m が存在する条件であり，つまりは直線 l が存在するときに通る点である．

よって　$\boldsymbol{y\leqq x^2+\frac{1}{4}}$

図示すると右図斜線部分（境界含む）．



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

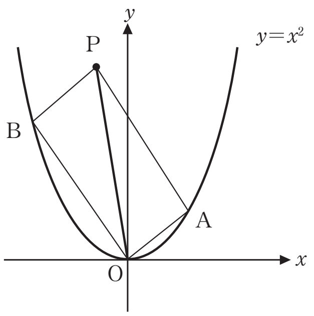
3 Oを原点とする座標平面上の曲線 $y=x^2$ 上の2点A, Bに対し，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=t$ とおく.

(1) t のとり得る値の範囲を求めよ.

(2) $t=2$ のとき，$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ となる点Pの軌跡を求め，図示せよ.

$A(a, a^2)$，$B(b, b^2)$ とおく.

(1) $t=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=ab+(ab)^2=\left(ab+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\geqq-\frac{1}{4}$



等号成立は $ab=-\frac{1}{2}$ のとき.

よって　$\boldsymbol{t\geqq-\frac{1}{4}}$

(2) $t=2$ より　$(ab)^2+ab-2=0$

よって　$ab=1,\ -2$

$P(X, Y)$ とおくと，$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ より

$$\begin{cases}X=a+b\\Y=a^2+b^2=(a+b)^2-2ab\end{cases}$$

よって　$Y=X^2-2ab$　……①

ここで，a，b は2次方程式

$s^2-(a+b)s+ab=0$　つまり　$s^2-Xs+ab=0$　の2解である.

実数条件より　$X^2-4ab\geqq0$　……②

$ab=1$ のとき　①より $Y=X^2-2$

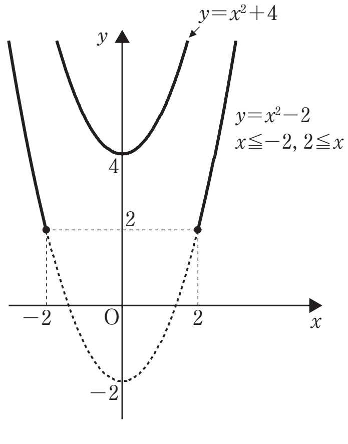
②より $X^2-4\geqq0$　よって　$X\leqq-2,\ 2\leqq X$

$ab=-2$ のとき　①より $Y=X^2+4$

②より $X^2+8\geqq0$　これはすべての実数 X で成り立つ.

以上より，求める点Pの軌跡は

$\boldsymbol{y=x^2-2\ (x\leqq-2,\ 2\leqq x)}$　**または**　$\boldsymbol{y=x^2+4}$



図示すると，右図の実線部.

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　a, t を実数とし，a は $|a| \leqq 1$ を満たすものとする．

$$f(x)=\begin{cases}-x^2+3 & (x \leqq a)\\ -a^2+3 & (x>a)\end{cases}$$

とし, C を $y=f(x)$ で定まるグラフとする．また l を $y=tx+t+2$ で定まる直線とする．

(1)　直線 l は t によらず定点を通ることを示せ．また l が放物線 $y=-x^2+3$ に接するような t を求めよ．

(2)　C と l が相異なる2点のみを共有するような t の範囲を求め，さらにその共有点の x 座標を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　曲線 $C: y=-x^2-1$ を考える．

(1)　t が実数全体を動くとき，放物線 $y=\dfrac{3}{4}(x-t)^2-t^2-1$ が通過する領域を xy 平面上に図示せよ．

(2)　D を(1)で求めた領域の境界とする．D が x 軸の正の部分と交わる点を $(a,\ 0)$ とし，$x=a$ での C の接線を l とする．D と l とで囲まれた部分の面積を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1 a，t を実数とし，a は $|a| \leqq 1$ を満たすものとする．

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+3 & (x \leqq a) \\ -a^2+3 & (x>a) \end{cases}$$

とし，C を $y=f(x)$ で定まるグラフとする．また l を $y=tx+t+2$ で定まる直線とする．

(1) 直線 l は t によらず定点を通ることを示せ．また l が放物線 $y=-x^2+3$ に接するような t を求めよ．

(2) C と l が相異なる2点のみを共有するような t の範囲を求め，さらにその共有点の x 座標を求めよ．

解答例

(1) $l: y=tx+t+2$　より　$(x+1)t+(-y+2)=0$

これが t の値によらず成り立つのは　$x+1=0$　かつ　$-y+2=0$　つまり

$x=-1$，$y=2$ のときである．

よって，直線 l は t の値によらず定点 $(-1,\ 2)$ を通る．

また，直線 $l: y=tx+t+2$ と放物線 $y=-x^2+3$ の共有点の x 座標について

$tx+t+2=-x^2+3$　　$x^2+tx+t-1=0$　……①　　$(x+1)(x+t-1)=0$

よって，共有点の x 座標は $x=-1$，$-t+1$

この2解が一致するときが直線 l と放物線が接するときである．

よって　$-t+1=-1$ より　$\boldsymbol{t=2}$

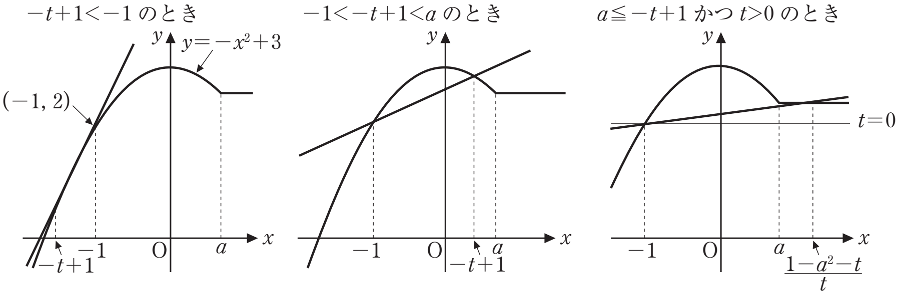
(2) (1)より C と l の共有点の1つは $(-1, 2)$ であり，また $t=2$ のとき2つのグラフは接する．

また，直線 l と放物線 $y=-x^2+3$ の交点の x 座標で $x=-1$ 以外のものは $x=-t+1$ である．

直線 l と直線 $y=-a^2+3$ の交点の x 座標について

$tx+t+2=-a^2+3$ のとき　　$t \neq 0$ のとき　$x=\dfrac{1-a^2-t}{t}$

この結果と C と直線 l（傾き t）のグラフより，題意を満たす場合を考える．



以上より，$|a| \leqq 1$ において，求める t の条件とその時の共有点の x 座標は

$\boldsymbol{1-a<t<2,\ 2<t}$ **のとき**　$\boldsymbol{x=-1,\ -t+1}$

$\boldsymbol{0<t \leqq 1-a}$ **のとき**　$\boldsymbol{x=-1,\ \dfrac{1-a^2-t}{t}}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 曲線 $C: y=-x^2-1$ を考える．

(1) t が実数全体を動くとき，放物線 $y=\dfrac{3}{4}(x-t)^2-t^2-1$ が通過する領域を xy 平面上に図示せよ．

(2) D を(1)で求めた領域の境界とする．D が x 軸の正の部分と交わる点を $(a,\ 0)$ とし，$x=a$ での C の接線を l とする．D と l とで囲まれた部分の面積を求めよ．

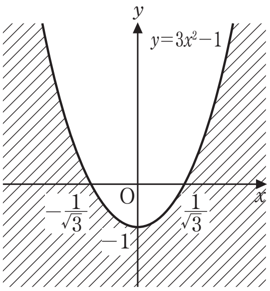
解答例

(1) $y=\dfrac{3}{4}(x-t)^2-t^2-1$ より $t^2+6xt-3x^2+4y+4=0$

この式を満たす実数 t が存在する条件は，判別式 $D\geqq 0$

よって　$9x^2-(-3x^2+4y+4)\geqq 0$　　$y\leqq 3x^2-1$

したがって，これが求める領域は右図斜線部分.（境界含む）



(2) $D: y=3x^2-1$　　$a=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

また，$C: y=-x^2-1$ より $y'=-2x$

$x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ における C の接線 l の方程式は

$$y=-\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)-\frac{4}{3}\quad より\quad y=-\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{2}{3}$$

これと D との共有点の x 座標は

$$3x^2-1=-\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{2}{3}\qquad 9x^2+2\sqrt{3}\,x-1=0\quad の２解である．$$

この２解を $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とすると，$\alpha=-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\ \beta=\dfrac{\sqrt{3}}{9}$

よって，D と l で囲まれた部分の面積は

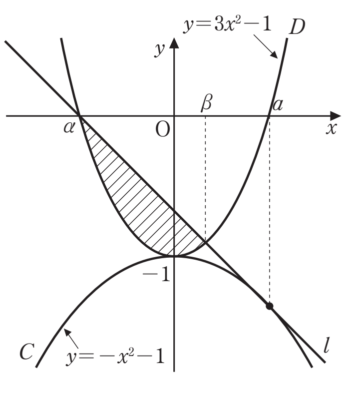
$$\int_\alpha^\beta\left\{\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{2}{3}\right)-(3x^2-1)\right\}dx$$

$$=\int_\alpha^\beta\left(-3x^2-\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{3}\right)dx$$

$$=-3\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx$$

$$=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{9}+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3=\boldsymbol{\frac{32\sqrt{3}}{243}}$$



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。